Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση το $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x}\, dx$

α' τρόπος

Επιλέγω $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\log x}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$$

άρα, $l = +\infty$ και αφού $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x}\, dx = +\infty$ θα αποκλίνει

β' τρόπος

Το υπολογίζουμε

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x}\, dx = \int_1^{+\infty} \log x\,(\log x)'\, dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} d(\log^2 x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\beta\to+\infty} (\log^2 x)\Big|_1^{\beta} = \frac{1}{2}\lim_{\beta\to+\infty} (\log\beta)^2 = +\infty$$

Μέσω του Κριτηρίου του Cauchy

Να εξεταστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα ως προς τη σύγκλιση:

$$\int_0^{+\infty} x \cdot \sigma\upsilon\nu(x^4)\, dx$$

ΛΥΣΗ

Θέτω $x^4 = t \Rightarrow dx = \frac{1}{4x^3} dt$, $\boxed{x = \sqrt[4]{t}}$

- $x \to 0$, $t \to 0$
- $x \to \infty$, $t \to \infty$

$$\int_0^{+\infty} x\, \sigma\upsilon\nu t \,\frac{1}{4x^3}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4x^2}\, \sigma\upsilon\nu t\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{t}}\, \sigma\upsilon\nu t\, dt = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\, \sigma\upsilon\nu t\, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot \sigma\upsilon\nu t\, dt = \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \overset{t^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{t}}}\cdot(\eta\mu t)'\, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\eta\mu t\right]_0^x - \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}}\eta\mu t\, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\eta\mu t\right]_0^x + \frac{1}{8}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{t^{3/2}}\eta\mu t\, dt =$$

Παίρνουμε, έπειτα το

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{t}}\sigma\upsilon\nu t\, dt = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\eta\mu t\right]_{x_1}^{x_2} + \frac{1}{8}\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{t^{3/2}}\eta\mu t\, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}}\eta\mu x_2 - \frac{1}{\sqrt{x_1}}\eta\mu x_1\right) + \frac{1}{8}\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{t^{3/2}}\eta\mu t\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sqrt{t}}\sigma\upsilon\nu t\, dt\right| \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} + \frac{1}{\sqrt{x_1}}\right) + \frac{1}{8}\int_{x_1}^{x_2} t^{-\frac{3}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x_2}} + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{8}\cdot\frac{t^{-1/2}}{-1/2}\Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x_2}} + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{8}\left(\frac{x_2^{-1/2}}{-1/2} - \frac{x_1^{-1/2}}{-1/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x_2}} + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1}}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x_2}}} + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \cancel{\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x_2}}} + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x_1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_1}} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} < \varepsilon \quad (1)$$

ΝΑΙ ΑΛΛΑ ΜΕ ΤΗΝ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ το $t = x^4$

για η (1) είναι: $\frac{1}{2x_1^2} < \varepsilon$

επιλέγουμε το $\delta = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$!!!

$$\int_1^{+\infty} \sigma\upsilon\nu(x^2)\,dx$$

Θέτω $x^2 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt \Rightarrow \boxed{dx = \frac{dt}{2x}}$

- $x \to \infty$, $t \to +\infty$
- $x \to 1$, $t \to 1$

$$\int_1^{+\infty} \sigma\upsilon\nu t \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu t}{\sqrt{t}}\,dt$$

Έστω $f(t) = \sigma\upsilon\nu t$ ← φραγμένη

$g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ ← $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

$g'(t) = -\frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}} < 0$

← Απολυτα ολοκληρωσιμη

Αρα απο Κρ. Dirichlet Το $\int_1^{+\infty} \sigma\upsilon\nu(x^2)\,dx < +\infty$

$$\int_1^{+\infty} -\frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}}\,dt = \int_1^{+\infty} -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{t^3}}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \left|\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{t^3}}\right| dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{t^3}}\,dt = \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,dt < +\infty$$

Ολοκληρωσιμη με

$\left(\frac{3}{2} = 1{,}5 > 1\right)$

$$J = \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt = ???$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

κάνουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$J = \int_0^\infty t^2(-e^{-t})' dt = [\lim_{t\to\infty} \cancelto{0}{t^2(-e^{-t})}] - [\cancelto{0}{0^2(-e^{-0})}] + \int_0^\infty 2te^{-t} dt =$$

κάνουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες ξανά

$$= 2\int_0^\infty t(-e^{-t})' dt = 2[\lim_{t\to\infty} \cancelto{0}{t(-e^{-t})}] - 2[\cancelto{0}{0(-e^{-0})}] + 2\int_0^\infty e^{-t} dt =$$

$$= 2[\lim_{t\to\infty} \cancelto{0}{(-e^{-t})}] - 2[(-e^{-0})] = 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-1)$$

Τα όρια βγαίνουν 0 με τους κανόνες De L’ Hospital

ΑΣΚΗΣΗ

α. ΝΔΟ $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\log x}\,dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\eta\mu x}{x(\log x)^2}\,dx$

β. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση

το: $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\log x}\,dx$

ΛΥΣΗ

α. $$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\log x}\,dx = \underbrace{\left(\frac{\eta\mu x}{\log x}\right)\Bigg|_{\pi}^{+\infty}}_{\text{Αρκεί ίσο με το μηδέν}} + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\eta\mu x}{x(\log x)^2}\,dx$$

$$\left(\frac{\eta\mu x}{\log x}\right)\Bigg|_{\pi}^{+\infty} = \lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu x}{\log x}\right)\Bigg|_{\pi}^{\beta} = \lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu\beta}{\log\beta} - \cancelto{0}{\frac{\eta\mu\pi}{\log\pi}}\right) =$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} \eta\mu\beta\cdot\frac{1}{\log\beta} \overset{\text{φραγμ. επί}}{\underset{\text{μηδενική συνάρτηση}}{=}} 0$$

β. α' τρόπος

Έστω $\varphi(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $f(x) = \dfrac{1}{\log x}$

η $\varphi(x)$ φραγμένη και $f'(x) = -\dfrac{1}{x\cdot\log^2 x} < 0 \Rightarrow f$ φθίνουσα

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Τότε από ΘΕΩΡΗΜΑ 3.42

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\log x}\,dx < +\infty$$

β' τρόπος

$$\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\eta\mu x}{x\cdot\log^2 x}\right| dx = \int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\log x}\right| dx \leq \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x\cdot\log^2 x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\log x}\Bigg|_{\pi}^{+\infty} = -\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{1}{\log\beta} - \frac{1}{\log\pi}\right) = \frac{1}{\log\pi}$$ συγκλίνει και μάλιστα απόλυτα!